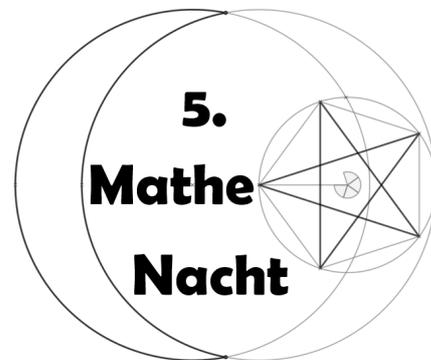


Rechenspaß mit Matrizen



1. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- Bestimme $\text{Det}(A)$ mit dem Verfahren von Sarrus.
- Existiert A^{-1} ? Wenn ja, bestimme mit einem Verfahren Deiner Wahl $\text{Det}(A^{-1})$.
Wenn nein, begründe, warum A^{-1} nicht existiert.
- Bestimme $\text{Det}(\frac{1}{9} \cdot A * A^t)$.

2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist B invertierbar?

3. Seien $C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

- Bestimme $\text{Det}(C)$.
- Bestimme $\text{Det}(D)$.
- Bestimme $\text{Det}(C * D)$.

4. Sei $E := \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Existiert E^{-1} ? Wenn ja, dann bestimme E^{-1} mit einem Verfahren Deiner Wahl.
Wenn nein, begründe, warum E^{-1} nicht existiert.

5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\text{Rg}(F) = 2$?

6. Sei $G := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$.

Bestimme $\text{Rg}(G)$.

7. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $H := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} -a & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\text{Rg}(H) = \text{Rg}(J)$?

8. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $K := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 16 \\ a & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert K^{-1} ? Gilt dann $\text{Rg}(K) = \text{Rg}(K^{-1})$?

9. Sei $L := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem $x * L = (11, 17, -17)$ mit Hilfe der CRAMER'SCHEN Regel.

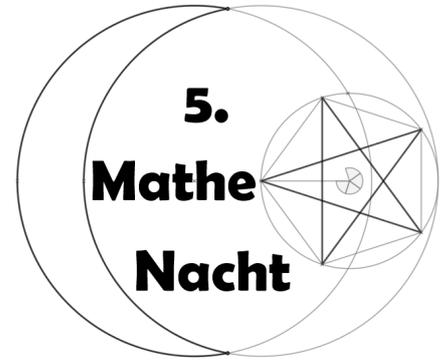
10. Sei $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem $x * M = (3, 2, 6, 1)$ mit Hilfe der CRAMER'SCHEN Regel.

11. Sei $N := \begin{pmatrix} 9 & -7 & 10 & 0 & 3 \\ 7 & 12 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -6 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.

Bestimme $\text{Det}(N)$ mit einem Verfahren Deiner Wahl.

Abbildungsmatrizen



1. Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen \mathbb{R} -Vektorraum V und geeignete \mathbb{R} -Basen so, dass B die Abbildungsmatrix eines \mathbb{R} -Automorphismus auf V bezüglich dieser Basen ist? Bitte begründen!

2. Sei \hat{C} die geordnete Standardbasis von \mathbb{R}^3 und $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ gegeben durch

$$M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- a) Ist $M(\alpha, \hat{C}, \hat{C})$ invertierbar? Bitte begründen!
- b) Bestimme $\text{Bild}(\alpha)$ und $\text{Kern}(\alpha)$!
3. Sei K ein Körper und seien V, W zwei K -Vektorräume. Weiter sei $m := \dim_K(V) \neq \dim_K W =: n$.

Wahr oder Falsch? Es gibt ein $\beta \in \text{Hom}_K(V, W)$ so, dass β bijektiv ist.

4. Seien $V := \mathbb{R}^3$ und $b_1 := (1, 1, 0)$, $b_2 := (0, -1, 0)$, $b_3 := (0, 0, 2)$. Weiter sei $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$ und $\alpha : V \rightarrow V$ sei definiert durch:

$$b_1^\alpha = b_2 + b_3, \quad b_2^\alpha = (2, 1, -2), \quad b_3^\alpha = (1, -1, 0)$$

- a) Zeige, dass \hat{B} eine geordnete \mathbb{R} -Basis von \mathbb{R}^3 ist.
- b) Bestimme $M(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$!
- c) Ist α bijektiv? Bitte begründen.
- d) Berechne die Bilder von $(1, 0, 2)$ und $(1, -1, 0)$ unter α !

5. Sei wieder $V := \mathbb{R}^3$ und $\hat{B} := ((-1, 2, 3), (1, -1, 2), (0, 2, 1))$. Wir bezeichnen die Vektoren in \hat{B} der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3 und dürfen wissen, dass \hat{B} eine geordnete \mathbb{R} -Basis ist. Weiter sei $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ gegeben durch:

$$b_1^\varphi = (-1, 3, 8), \quad b_2^\varphi = 3b_3, \quad (1, 1, 3)^\varphi = (0, 5, 7).$$

- a) Es sei \hat{C} die geordnete Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Berechne $A := M(\varphi, \hat{B}, \hat{B})$ und $\tilde{A} := M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$!
- b) Berechne $(2, 0, 2)^\varphi$!
- c) Ist φ surjektiv? Bitte begründen!
- d) Welchen Rang hat A ? Welchen Rang hat \tilde{A} ?
- e) Bestimme ein Urbild von $(0, 3, -3)$ unter φ . Gibt es weitere Urbilder?
6. Sei $\beta \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Sei weiter \hat{B} die geordnete Standardbasis von \mathbb{R}^3 und \hat{C} die geordnete Standardbasis von \mathbb{R}^2 . Es sei $A := M(\beta, \hat{B}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimme $\text{Kern}(\beta)$! Ist β injektiv?

7. Sei $V := \mathbb{R}^4$ und $\hat{B} := ((b_1, b_2, b_3, b_4))$ eine geordnete \mathbb{R} -Basis von V . Sei α gegeben durch:

$$b_1^\alpha = 2b_1, \quad b_2^\alpha = b_1 + b_3, \quad b_3^\alpha = 2b_1, \quad b_4^\alpha = b_3$$

- a) Gib eine \mathbb{R} -Basis von $\text{Bild}(\alpha)$ an!
- b) Es sei $U := \langle b_2, b_3 \rangle_{\mathbb{R}}$. Bestimme U^α !
8. Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit der geordneten K -Basis (b_1, b_2, b_3) . Weiter sei $0 \neq \delta \in K$ fest. Die lineare Abbildung $\alpha \in \text{End}(V)$ sei definiert durch:

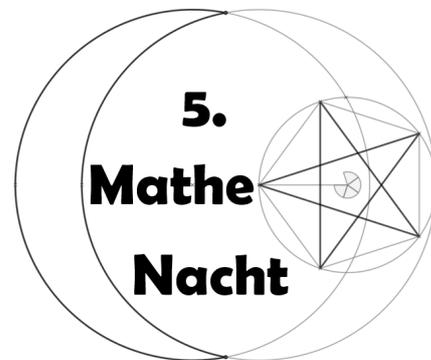
$$b_1^\alpha = \delta \cdot b_2, \quad b_2^\alpha = b_1, \quad b_3^\alpha = b_1 + b_2$$

Sei $U \leq_K V$ mit $U = \langle b_1, b_2 \rangle_K$. Zeige: $U^\alpha = U$.

9. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V := K^n$. Weiter sei $A \in M_{n \times n}(K)$ und $\eta \in \text{End}(V)$ wie folgt definiert: Für alle $v \in V$ sei $v^\eta := v * A$.

Wahr oder Falsch? Für jede geordnete K -Basis \hat{B} von V gilt: $M(\eta, \hat{B}, \hat{B}) = A$.

Lineare Gleichungssysteme



1. Gegeben seien das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

die Matrix $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b := (1, 1, 1)$.

- Schreibe das Gleichungssystem in die Form $x * A = d$ um und kennzeichne die Koeffizientenmatrix, den Ergebnisvektor und den Variablenvektor jeweils mit blau, rot und grün.
- Schreibe nun die erweiterte Koeffizientenmatrix A^* hin und bestimme den Rang von A^* . Was kannst du jetzt über die Lösungsmenge sagen ohne sie explizit zu berechnen?
- Nun einmal andersherum:
Schreibe das Gleichungssystem $x * B = b$ mit einzelnen Gleichungen und Variablen x_1, x_2, x_3 hin.
- Bestimme nun für das Gleichungssystem aus (c) die Lösungsmenge, indem du eine Lösung errätst und dann mit dem dazugehörigen HLGS weitermachst.

2. Vervollständige die Koeffizientenmatrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ so, dass das Lineare Gleichungssystem $x * A = (1, 2, 1)$

- genau eine Lösung hat.
- unlösbar ist.

3. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $d := (a, 6, 0)$.

- Wähle $a \in \mathbb{R}$ so, dass das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ keine Lösung besitzt.
- Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

4. Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4 \\2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= -8\end{aligned}$$

Bestimme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die vollständige Lösungsmenge des LGS.

5. Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (0, 1, 0)$ sagen?

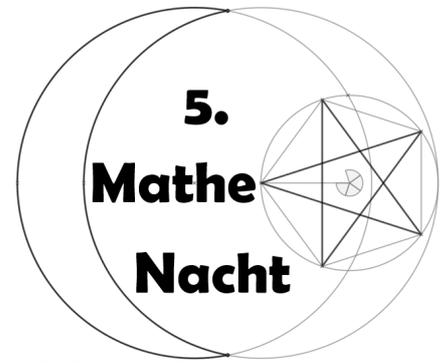
b) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (1, 0, 1)$ sagen?

6. Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $x * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$.

a) Ist die Lösungsmenge des LGS ein \mathbb{R} -Teilraum von \mathbb{R}^3 ?

b) Falls die Lösungsmenge ein \mathbb{R} -Teilraum ist, welche Dimension hat dieser dann?

Eigenwerte/Eigenvektoren



1. Gegeben sei der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^3 . Weiter sei die geordnete \mathbb{R} -Basis \hat{B} gegeben durch $\hat{B} := ((-2, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, -1))$ und die Abbildung $\alpha \in \text{End}(V)$ sei bestimmt durch die folgenden Bilder:

$$\begin{aligned}(-2, 1, 0)^\alpha &= (-2, 1, 0) \\(0, 1, 1)^\alpha &= (-4, -3, -3) \\(0, 0, -1)^\alpha &= (-2, -2, -3)\end{aligned}$$

- a) Bestimme $\text{Spek}(\alpha)$!
- b) Gib zu jedem Eigenwert die Dimension des Eigenraumes an!
- c) Bestimme zu einem Eigenwert den Eigenraum!
- d) Prüfe, ob α diagonalisierbar ist!
2. Es sei $V := \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. Folgendes ist über α bekannt: 2 ist ein Eigenwert von α mit $\text{Eig}_V(\alpha, 2) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle_{\mathbb{R}}$. 4 ist ein Eigenwert von α .

Zeige: $\text{Spek}(\alpha) = \{2, 4\}$.

3. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\alpha \in \text{End}(V)$. Weiter seien $\lambda \in \text{Spek}(\alpha)$, $v_1 \in \text{Eig}_V(\alpha, \lambda)$ und $v_2 \in V$.

Zeige: Ist $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig, so ist $v_2 \in \text{Eig}_V(\alpha, \lambda)$.

4. Es sei $V := \mathbb{R}^3$ und \hat{C} sei eine geordnete \mathbb{R} -Basis von V . Der Homomorphismus $\gamma : V \rightarrow V$ sei gegeben durch die Abbildungsmatrix:

$$M(\gamma, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

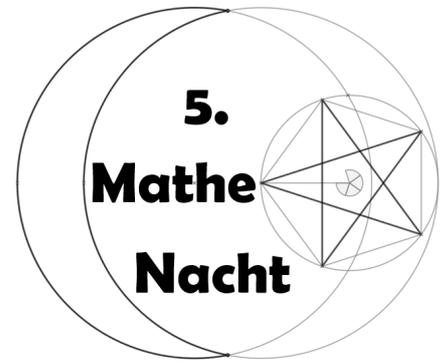
Zeige, dass γ nicht diagonalisierbar ist.

5. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum der Dimension 4. Weiter seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ so, dass $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ K -linear unabhängig ist. Es sei $\beta \in \text{End}(V)$ und es gelte

$$v_1^\beta = 3v_1, \quad v_2^\beta = 4v_2, \quad v_3^\beta = -v_3, \quad v_4^\beta = -v_4$$

Zeige, dass β diagonalisierbar ist!

Zusammenhänge



1. Sei \hat{B} die geordnete Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Seien weiter $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ durch folgende Abbildungsmatrix gegeben :

$$A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- Berechne nachvollziehbar mittels Leibniz-Formel und Entwicklung nach der 2. Zeile die Determinante von A .
 - Begründe, warum α bijektiv ist und berechne $\mathcal{M}(\alpha^{-1}, \hat{B}, \hat{B})$.
 - Ersetze in der Abbildungsmatrix A die letzte Zeile durch $(1, -1, a)$. Für welchen Wert von a ist α nicht bijektiv?
 - Schreibe für diesen Wert von a den Spaltenraum von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.
2. Sei \hat{B} die geordnete Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Sei $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ durch folgende Abbildungsmatrix gegeben :

$$A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- Zeige, dass $P(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$ das charakteristische Polynom von α ist und gib die Eigenwerte von α an.
- Stelle das lineare Gleichungssystem auf, dessen Lösungsmenge genau $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(\alpha, 0)$ ist und löse es nachvollziehbar mit dem Gauß-Algorithmus.
- Welche Dimension haben $\text{Kern}(\alpha)$ und $\text{Bild}(\alpha)$?
Gib eine \mathbb{R} -Basis von $\text{Kern}(\alpha)$ an und ergänze diese zu einer \mathbb{R} -Basis von \mathbb{R}^3 .
- Ist α bijektiv?

3. Sei \hat{B} die geordnete Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Sei $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ durch folgende Abbildungsmatrix gegeben: $A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- a) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von α .
- b) Sei $P_{\alpha}(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom von α .
Sei M die Menge aller 3×3 -Matrizen über \mathbb{R} . Zeige, dass $P_{\alpha}(A) = 0_M$ gilt.
(Hinweis: $P_{\alpha}(A)$ ist durch den Einsetzhomomorphismus erklärt.)
- c) Bestimme aus $P_{\alpha}(A) = 0_M$ die inverse Matrix A^{-1} .
- d) Bestimme für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $x(A - \lambda_j I) = 0_{\mathbb{R}^3}$ und zeige, dass $\hat{C} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 4))$ eine \mathbb{R} -Basis von \mathbb{R}^3 bestehend aus Eigenvektoren ist.
- e) Berechne $\mathcal{M}(\alpha, \hat{C}, \hat{C})$. Ist α diagonalisierbar?